Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Fonctions usuelles

1. Quelques généralités

Dans tout ce chapitre, I désigne un inervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$: on note $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition :

On note $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

1.1. Parité, période

Définition :

Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est dit centré en 0 si $\forall x \in X,\ -x \in X$.

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

- paire si $\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$
- impaire si $\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$.

Propriétés :

- Si f est impaire et $0 \in D_f$, alors $f(0) = 0$.
- Si f est paire, $\mathscr{C}_f$ possède un axe de symétrie : l'axe (Oy)
- Si f est impaire, $\mathscr{C}_f$ possède un centre de symétrie : O.

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$ si :

$\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I,\ a-h \in I$ et $f(a+h) = f(a-h)$

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point A de coordonnées (a, b) pour centre de symétrie si :

$\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I,\ a-h \in I$ et $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$

Définition :

Soient $f : I \to \mathbb{R},\ T \in \mathbb{R}^*$. On dit que T est une période de f ou que f est T- périodique si :

$\forall x \in I$ tel que $x+T \in I,\ f(x+T) = f(x)$.

On obtient toute la courbe d'une fonction T- périodique, en traçant sur un intervalle de longueur T et en effectuant des translations de vecteur $T \times k \times \vec{i},\ k \in \mathbb{Z}$.

1.2. Limite, continuité, dérivabilité

Définition :

Soient $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Définition :

Soient $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers 0.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. La fonction dérivée est notée $f'(x)$ ou $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Propriétés :

Si f et $g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables sur I, $k \in \mathbb{R}$, on a :

$(f+g)' = f' + g' \qquad (kf)' = kf' \qquad (gf)' = f'g + fg' \qquad \left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2} \qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

Propriété :

f est dérivable $\Rightarrow$ f est continue.

Propriétés :

Si f est continue et dérivable sur I,

- $\forall x \in I,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow f$ est une fonction constante.
- $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.
- $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante.
- $\begin{cases} \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0 \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points} \end{cases} \Rightarrow f$ est strictement croissante.
- $\begin{cases} \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0 \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points} \end{cases} \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

1.3. Théorème de la bijection

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f réalise une bijection de I sur J si $\forall y \in J,\ \exists! x \in I$ tel que $f(x)=y$.
f^{-1} est appelée la bijection réciproque.

Théorème de la bijection :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. On a alors :

1. $f(I)$ est un intervalle du type de I et ses bornes sont les limites de f aux bornes de I.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$
3. f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone de même sens que f.
4. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
5. Si de plus f est dérivable et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Remarque :

Ce théorème sera utilisé dans la suite du chapitre pour prouver la définition, la continuité, le sens de variation et la dérivabilité des fonctions réciproques étudiées. Il permet également d'exprimer leur dérivée.

1.4. Plan d'étude d'une fonction

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction étudiée.
2. Réduction du domaine d'étude : parité, période, centre ou axe de symétrie.
3. Continuité et dérivabilité de f sur I.
4. Calcul et factorisation de f' pour déterminer son signe et résoudre $f'(x)=0$
5. Limites aux bornes.
6. Tableau de variations.
7. Étude des branches infinies et des asymptotes.
8. Étude des points d'inflexion (extrema de la dérivée)
9. Tracé de la fonction.

Branches infinies :

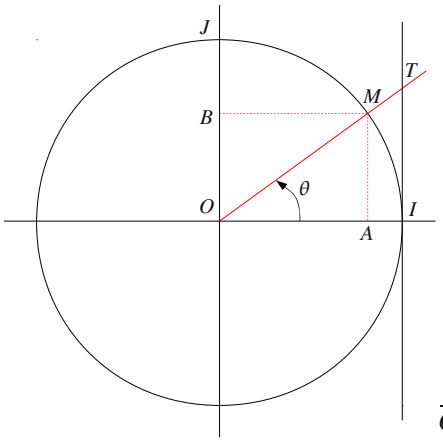
1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$: asymptote verticale $x=x_0$
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$: asymptote horizontale $y=l$
3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$: calcul de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0,\ \infty,\ a \in \mathbb{R},$ ou pas de limite.
   Si 0 ou ∞ : branche parabolique horizontale ou verticale.
   Si $a \in \mathbb{R}$: Calcul de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - a\,x = b \in \mathbb{R},\ \infty$
   Si $b \in \mathbb{R}$: asymptote $y = a\,x + b$
   Si ∞ : branche parabolique de direction asymptotique $y = a\,x$

Le signe de $f(x) - a\,x - b$ donne la position courbe-asymptote.

2. Fonctions usuelles

2.1. Fonctions trigonométriques

2.1.1. Définition géométrique



$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$

On définit $\sin(\theta) = \overline{OB}$, $\cos(\theta) = \overline{OA}$, $\tan(\theta) = \overline{IT}$

Pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin(\theta) = \frac{AM}{OM}$, $\cos\theta = \frac{OA}{OM}$, $\tan(\theta) = \frac{AM}{AO}$.

Pythagore donne : $1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$

Thalès donne : $\tan(\theta) = \frac{\overline{IT}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$\overline{OI} = \vec{i}$, $\|\vec{i}\| = 1$

2.1.2. Sinus et cosinus

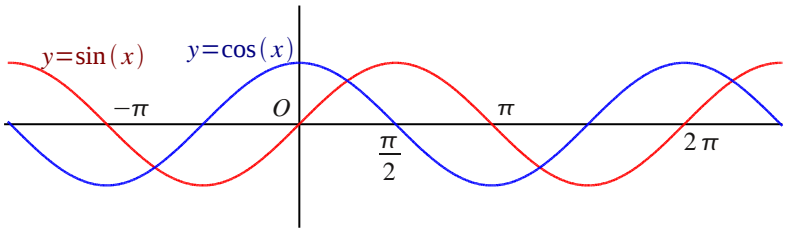
Proposition :

- Sinus es définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Sinus est impaire, 2π- périodique, et admet O comme centre de symétrie.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, et admet $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
- $\sin' = \cos$. $\quad -\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Proposition :

- Cosinus est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Cosinus est paire, 2π - périodique, et admet $(O\,y)$ comme axe de symétrie.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.
- $\cos' = -\sin$. $\quad -\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



2.1.3. Formules

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ $\quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ $\quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\quad 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\quad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

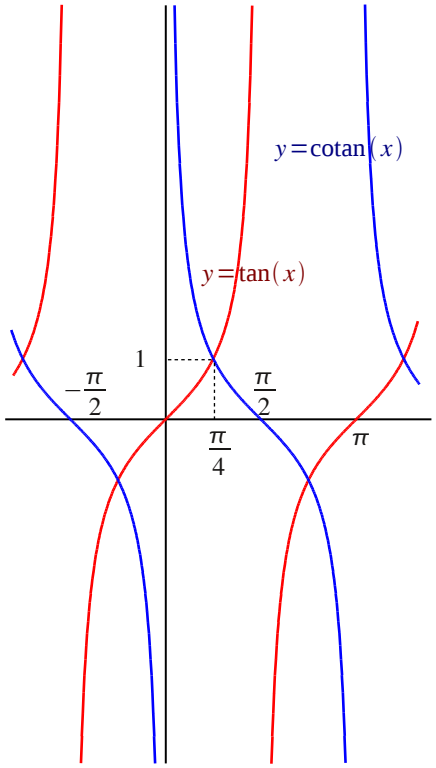
$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\quad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))=\cos(a)\cos(b) \qquad \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))=\sin(a)\sin(b)$$
$$\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))=\sin(a)\cos(b) \qquad \sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

2.1.4. Tangente et cotangente

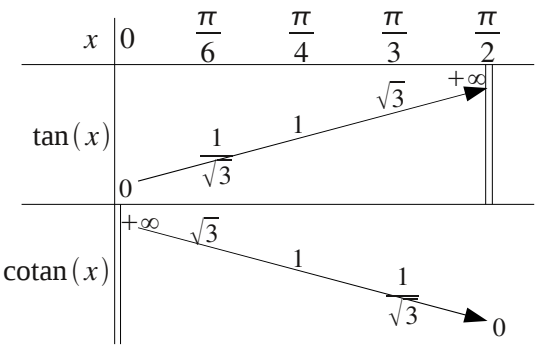
Définition :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)},\quad \operatorname{cotan}(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$



Proposition :

- Tangente est définie, continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.
- Cotangente est définie, continue et dérivable sur $]k\pi,(k+1)\pi[$.
- Tangente et cotangente sont impaires et π - périodique.
- $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
- $\forall x\in]k\pi,(k+1)\pi[,\ \operatorname{cotan}'(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}=-1-\operatorname{cotan}^2(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{cotan}(x)=1$



2.1.5. Divers

Remarque :

$\cos(a)=\cos(b) \Leftrightarrow a=b+2k\pi$ ou $a=-b+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
$\sin(a)=\sin(b) \Leftrightarrow a=b+2k\pi$ ou $a=\pi-b+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
$\tan(a)=\tan(b) \Leftrightarrow a=b+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Proposition :

Soit $a\neq 0$.

$f : x\mapsto\cos(ax)$ est $\frac{2\pi}{a}$ - périodique, admet $x\mapsto -a\sin(ax)$ pour dérivée et $x\mapsto\frac{1}{a}\sin(ax)$ pour primitive.

$f : x\mapsto\sin(ax)$ est $\frac{2\pi}{a}$ - périodique, admet $x\mapsto a\cos(ax)$ pour dérivée et $x\mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax)$ pour primitive.

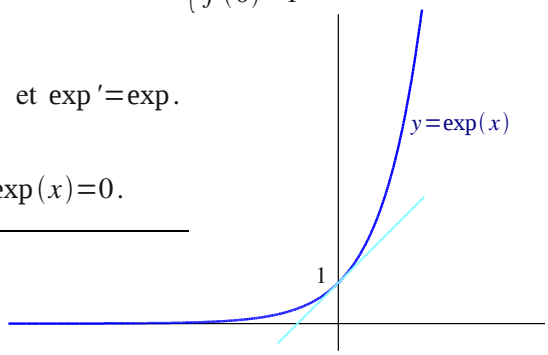
$f : x\mapsto\tan(ax)$ est $\frac{\pi}{a}$ - périodique.

2.2. Exponentielle, logarithme et puissance

2.2.1. Exponentielle

Définition :

On appelle exponentielle et on note $\exp$ l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$



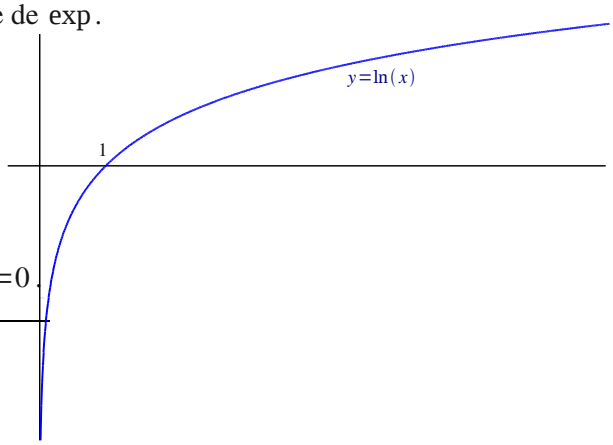
Proposition :

- La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'=\exp$.
- $\forall x\in\mathbb{R},\ \exp(x)>0$, $\exp$ est strictement croissante.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(x)}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\exp(x)=0$.

2.2.2. Logarithme

Définition :

$\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle logarithme népérien et on note $\ln$ la bijection réciproque de $\exp$.



Proposition :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}_+^*,\ y=\exp(x)\ \Leftrightarrow\ x=\ln(y)$
- $\ln$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$
- $\ln$ est strictement croissante.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}x\ln(x)=0$.

2.2.3. Équations fonctionnelles

Proposition :

1. Équation fonctionnelle de $\ln$: $\forall x,y>0,\ \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
2. $\forall x>0,\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)$
3. $\forall x>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ \ln(x^r)=r\ln(x)$

Preuve :

1. On fixe $y>0$. On pose $f(x)=\ln(xy)-\ln(x)$

   f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\dfrac{y}{xy}-\dfrac{1}{x}=0$, donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   $f(1)=\ln(y)-\ln(1)=\ln(y)$, donc $\forall x,y>0,\ \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.
2. $\forall x>0,\ x\times\dfrac{1}{x}=1$, donc $\ln(x)+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=\ln(1)=0$.
3. · Posons $r=n\in\mathbb{N}$, par récurrence sur n :
   - Pour $n=0$: $\forall x>0, x^0=1$ donc $\ln(x^0)=\ln(1)=0=0\times\ln(x)$: proposition vérifiée au rang 0.
   - Supposons $n\in\mathbb{N}$, et la formule vraie au rang n :

     $\forall x>0,\ \ln(x^{n+1})=\ln(x^n x)=\ln(x^n)+\ln(x)=n\ln(x)+\ln(x)=(n+1)\ln(x)$: vérifié au rang $n+1$.

     Par récurrence, la proposition est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   · Posons $r=p\in\mathbb{Z}_-^*$: Posons $n=-p$. $\forall x>0,\ \ln(x^p)=\ln(x^{-n})=\ln\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=-\ln(x^n)=-n\ln(x)=p\ln(x)$

   · Posons $r=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$. $\forall x>0,\ q\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\ln\left(\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)=\ln(x^p)=p\ln(x)\ \Leftrightarrow\ \ln(x^r)=\dfrac{p}{q}\ln(x)=r\ln(x)$.

Proposition :

1. Équation fonctionnelle de exp : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$
3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall r\in\mathbb{Q},\ \exp(rx)=(\exp(x))^r$.

Preuve (1) :

$\forall x,y\in\mathbb{R},\ \exists! x',y'\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $x=\ln(x')$ et $y=\ln(y')$

$\ln(x'y')=\ln(x')+\ln(y')\ \Leftrightarrow\ x'y'=\exp(x+y)\ \Leftrightarrow\ \exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$.

2.2.4. Puissances

Si $r\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x^r=x\times\ldots\times x$ (r fois)

Si $r=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ x^0=1$

Si $r\in\mathbb{Z}_-^*,\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ x^r=\dfrac{1}{x^{-r}}$

Si $r=\dfrac{1}{p},\ p\in\mathbb{N}^*,\ x\mapsto x^{\frac{1}{p}}$ est la bijection réciproque de $x\mapsto x^p$: il s'agit de la racine $p^{\text{ième}}$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ si p est pair, et sur $\mathbb{R}$ si p est impair.

Si $r=\dfrac{q}{p},\ q\in\mathbb{Z}^*,\ p\in\mathbb{N}^*,\ x^r=\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^q$ $\forall x\in\mathbb{R}_+$ si p est pair, $\forall x\in\mathbb{R}$ si p est impair.

Propriétés :

$x^{r+s}=x^r x^s,\ (x^r)^s=x^{rs},\ (xy)^r=x^r y^r$

(x,y,r,s convenables).

Il reste à définir x^r pour $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\forall x>0,\ x^r=\exp(r\ln(x))$

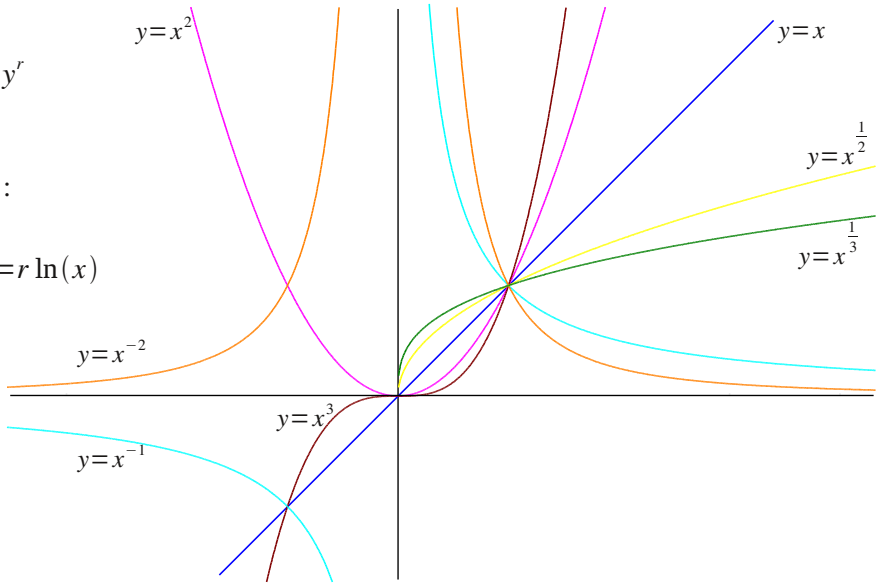
Ainsi, $\forall r\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln(x^r)=r\ln(x)$

Remarque :

$\exp(x)=\exp(x\ln(e))=e^x$

Propriétés :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$



2.2.5. Logarithme et exponentielle en base a

Définition :

Pour $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\},\ x\in\mathbb{R}_+^*$, on définit $\log_{[a]}(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Pour $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\},\ x\in\mathbb{R}$, on définit $\exp_{[a]}(x)=\exp(x\ln(a))=a^x$.

Propriétés :

$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\ \log_{[a]}(xy)=\log_{[a]}(x)+\log_{[a]}(y)$.

$\forall x,y\in\mathbb{R},\ a^{x+y}=a^x a^y$.

$\left(x\mapsto x^r\right)'=x\mapsto r\,x^{r-1}$ et $\left(x\mapsto a^x\right)'=x\mapsto\ln(a)a^x$.

Propriété :

Soient $u:I\to\mathbb{R}_+^*$ dérivable et $v:I\to\mathbb{R}$ dérivable.

$f:x\mapsto u(x)^{v(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x)=\left[v'(x)\ln(u(x))+v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right]\exp(v(x)\ln(u(x)))$.

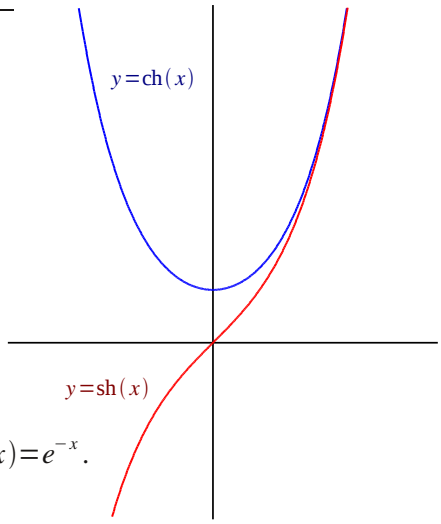
2.3. Fonctions hyperboliques

2.3.1. Cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Définition :

On appelle cosinus hyperbolique et on note ch : $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

On appelle sinus hyperbolique et on note sh : $\operatorname{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$



Proposition :

sh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, sh est impaire.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{sh}'(x)=\operatorname{ch}(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sh}(x)=+\infty$

ch est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, ch est paire.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{ch}'(x)=\operatorname{sh}(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}(x)=+\infty$

Propriétés :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)=1,\ \operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)=e^x,\ \operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)=e^{-x}.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x)\leqslant\dfrac{e^x}{2}\leqslant\operatorname{ch}(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)=0$: Les courbes représentatives de ch et de sh sont asyptotes l'une de l'autre.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}=+\infty$

2.3.2. Tangente hyperbolique

Définition :

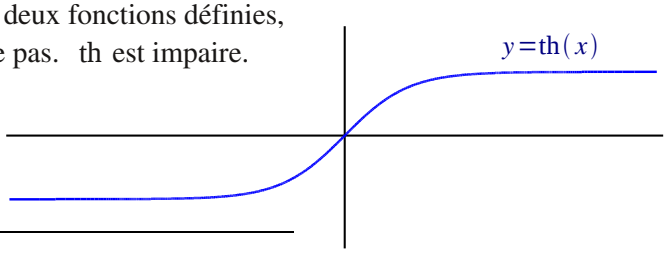
On appelle tangente hyperbolique et on note th : $\operatorname{th}(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Proposition :

th est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas. th est impaire.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x)=1-\operatorname{th}^2(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)=1,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{th}(x)}{x}=1.$



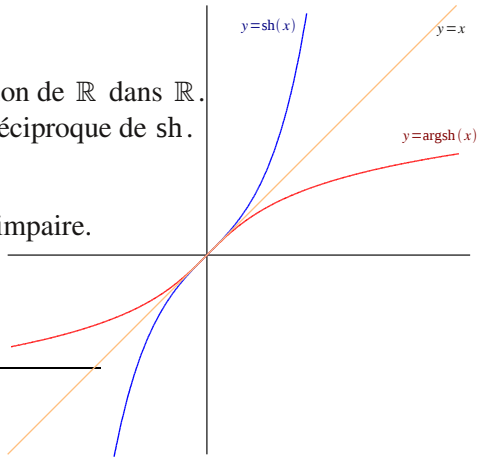
2.4. Fonctions hyperboliques réciproques

2.4.1. Argument sinus hyperbolique

Définition :

sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle argument sinus hyperbolique et on note argsh la bijection réciproque de sh.



Proposition :

argsh est définie, continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. argsh est impaire.

argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Lemme :

La bijection d'une fonction impaire bijective est impaire.

Preuve du lemme :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ impaire et bijective. I est centre en O.

$f^{-1} : J \to \mathbb{R}$, avec $J=f(I)$, et $\forall x\in J$, $\exists! y\in I$ tel que $x=f(y)$

$-y\in I$, et $f(-y)=-f(y)=-x$, donc $-x\in J$ et $f^{-1}(-x)=-y$ donc f^{-1} est impaire.

Preuve de la proposition :

argsh est impaire d'après le lemme.

$\begin{cases}\text{sh est dérivable sur } \mathbb{R}\\ \text{sh}'=\text{ch ne s'annule pas}\end{cases} \Rightarrow$ argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\text{argsh}'(x)=\dfrac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))}$

Soit $y=\text{argsh}(x)\in\mathbb{R}$. $\text{sh}(y)=x$ et $\text{ch}^2(y)-\text{sh}^2(y)=1$, donc $\text{ch}(y)=\sqrt{1+\text{sh}^2(y)}$ (car $\forall x\in\mathbb{R}$, $\text{ch}(x)\geqslant 0$)

Donc $\text{argsh}'(x)=\dfrac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2(\text{argsh}(x))}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists! y\in\mathbb{R}$ tel que $x=\text{sh}(y)$, Notons $Y=e^y>0$

$y=\text{argsh}(x) \Leftrightarrow x=\text{sh}(y) \Leftrightarrow x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2} \Leftrightarrow 2x=Y-\dfrac{1}{Y} \Leftrightarrow Y^2-2xY-1=0$

$\Delta=4(x^2+1)>0$, $Y_1=\dfrac{2x+2\sqrt{x^2+1}}{2}$, $Y_2=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2+1}}{2}<0$ (impossible), donc $Y=x+\sqrt{1+x^2}$ et $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2.4.2. Argument cosinus hyperbolique

Définition :

ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$

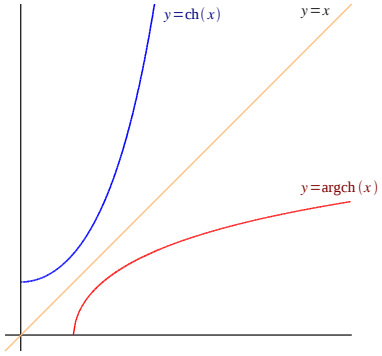
On appelle argument cosinus hyperbolique et on note argch la bijection réciproque de ch restreinte à $\mathbb{R}_+$.

Proposition :

argch est définie, continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $\text{argch}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x\in]1,+\infty[$, $\text{argch}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$



Preuve :

$\forall x\in[1,+\infty[$, $\exists! y\in\mathbb{R}_+$ tel que $x=\text{ch}(y) \Leftrightarrow y=\text{argch}(x)$

$\begin{cases}\text{ch est dérivable en } y\\ \text{ch}'(x)=\text{sh}(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1\end{cases} \Rightarrow$ argch est dérivable sur $]1,+\infty[$

$\text{argch}'(x)=\dfrac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))}$, et $\text{ch}^2(x)-\text{sh}^2(x)=1$, donc $\text{sh}(y)=\sqrt{\text{ch}^2(x)-1}$ (car $y>0$), donc $\text{argch}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

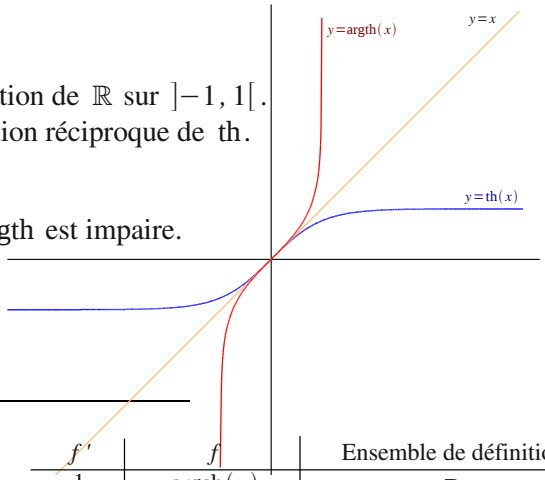
$\forall x\in[1,+\infty[$, $\exists! y\in\mathbb{R}_+$ tel que $x=\text{ch}(y)$, notons $Y=e^y\geqslant 1$

$y=\text{argch}(x) \Leftrightarrow x=\text{ch}(y) \Leftrightarrow x=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2} \Leftrightarrow 2x=Y+\dfrac{1}{Y} \Leftrightarrow Y^2-2xY+1=0$

$\Delta=4(x^2-1)\geqslant 0$, $Y_1=\dfrac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2}$, $Y_2=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}$: $Y_1\geqslant 1$, $Y_2<1$ car $Y_1Y_2=1$ et $Y_1+Y_2=2x\geqslant 2$:

Donc l'un est supérieur à 1, l'autre inférieur à 1, donc $\text{argch}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

2.4.3. Argument tangente hyperbolique



Définition :

th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
On appelle argument tangente hyperbolique et on note argth la bijection réciproque de th.

Proposition :

argth est définie, continue, et strictement croissante sur $]-1,1[$, argth est impaire.

argth est dérivable et $\forall x\in]-1,1[,\ \operatorname{argth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

$\forall x\in]-1,1[,\ \operatorname{argth}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Preuve :

$\begin{cases}\text{th est dérivable sur } \mathbb{R}\\ \text{th}' \text{ ne s'annule pas}\end{cases} \Rightarrow$ argth est dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x\in]-1,1[,\ \operatorname{argth}'(x)=\dfrac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))}=\dfrac{1}{1-x^2}$

$\forall x\in]-1,1[,\ \exists!\, y\in\mathbb{R}$ tel que $x=\operatorname{th}(y)$

$x=\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow x e^{2y}+x=e^{2y}-1 \Leftrightarrow e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

f'	f	Ensemble de définition
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsh}(x)$ $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argch}(x)$ $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$]1,+\infty[$ $]-\infty,-1[,]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argth}(x)$ $\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$]-1,1[$ $]-\infty,-1[,]-1,1[,]1,+\infty[$

2.5. Fonctions circulaires réciproques

2.5.1. Arcsinus

Définition :

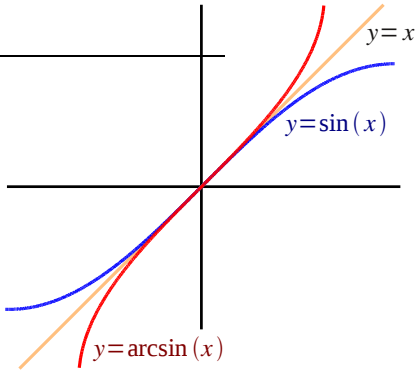
sin est définie, continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

On appelle arcsinus et on note arcsin la bijection réciproque de sinus restreinte à $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Proposition :

arcsin est définie, continue et strictement croissante sur $]-1,1[$, impaire, dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x\in]-1,1[,\ \arcsin'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Preuve :

$\forall x\in[-1,1],\ \exists!\, y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $x=\sin(y) \Leftrightarrow y=\arcsin(x)$

$\begin{cases}\sin \text{ est dérivable en } y\\ \sin'(y)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm 1\end{cases} \Rightarrow$ arcsin est dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x\in]-1,1[,\ \arcsin'(x)=\dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

$\cos^2(y)+\sin^2(y)=1 \Leftrightarrow \cos y=\sqrt{1-x^2}$ car $y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(y)>0$

2.5.2. Arccosinus

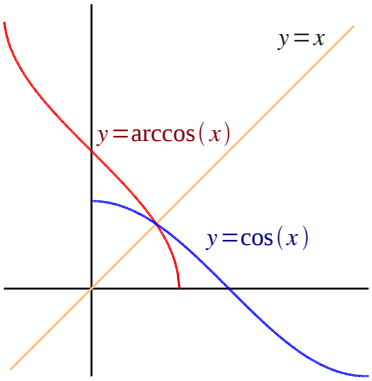
Définition :

sin est définie, continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
On appelle arccosinus et on note arccos la bijection réciproque de cosinus restreinte à $[0,\pi]$.

Proposition :

arccos est définie, continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

arccos est dérivable sur $]-1,1[$, $\forall x\in]-1,1[$, $\arccos'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Preuve :

$\forall x\in[-1,1]$, $\exists!\, y\in[0,\pi]$ tel que $x=\cos(y) \Leftrightarrow y=\arccos(x)$

$\begin{cases}\cos \text{ est dérivable en } y\\ \cos'(y)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm 1\end{cases} \Rightarrow$ arccos est dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x\in]-1,1[$, $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{-\sin(\arccos(x))}$

$\cos^2(y)+\sin^2(y)=1 \Leftrightarrow \sin y=\sqrt{1-x^2}$ car $y\in]0,\pi[$, donc $\sin(y)>0$

Remarque :

$\forall x\in]-1,1[$, $\arcsin'(x)+\arccos'(x)=0$: la fonction $\arcsin(x)+\arccos(x)$ définie, continue et dérivable sur $]-1,1[$ est donc constante. $\forall x\in]-1,1[$, $\arcsin(x)+\arccos(x)=\arcsin(0)+\arccos(0)=\dfrac{\pi}{2}$

Si on note $M(x,\arcsin(x))$ et $N(x,\arccos(x))$: le point P, milieu de $[MN]$ a pour coordonnées : $P\left(x,\dfrac{\pi}{4}\right)$

On obtient un axe de symétrie entre arcsin et arccos : $y=\dfrac{\pi}{4}$

2.5.3. Arctangente

Définition :

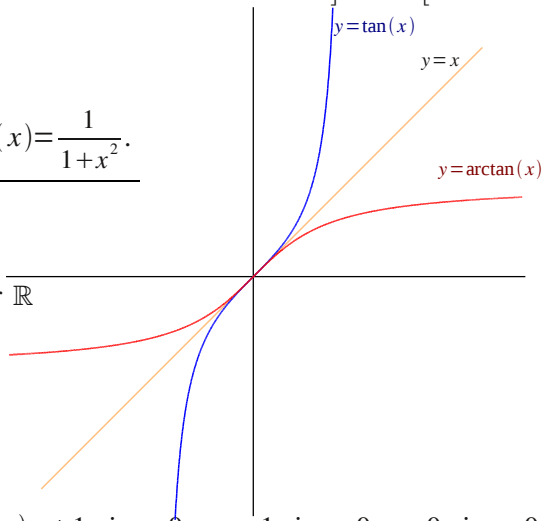
tan est définie, continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle arctangente et on note arctan la bijection réciproque de tangente restreinte à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Proposition :

arctan est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

arctan est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.



Preuve :

$\begin{cases}\tan \text{ est dérivable sur } \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ \tan' \text{ ne s'annule pas}\end{cases} \Rightarrow$ arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\dfrac{1}{1+x^2}$

Proposition :

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\text{signe}(x)\times\dfrac{\pi}{2}$, où $\text{signe}(x)=+1$ si $x>0$, $=-1$ si $x<0$, $=0$ si $x=0$.

Preuve :

Soit $f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. f est impaire.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}=0$

Donc $\exists c_1\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=c_1$ et $\exists c_2\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, $f(x)=c_2$

$c_1=f(1)=\arctan(1)+\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}$ Par parité, $c_2=-\dfrac{\pi}{2}$.

* * * * *